Дәріс 6

4-мысалдағыдай, $\operatorname{sgn}0 = 0$ болғанымен, ол мәннің функция аргументінің осы нүктеге ұмтылғанымен шегінің мәніне ешқандай қатысының жоқ екенін көрсететін мына шекті $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$ дәлелдейік.

Шынында да, $x \in R \setminus 0$ болса, онда $|\operatorname{sgn} x| = 1$, яғни бұл функция 0 нүктесінің кез-келген $\overset{\circ}{U}(0)$ ойылған маңайында 1-ге тең. Демек, 1 нүктесінің кез-келген $V(1)$ маңайы үшін

$$f(\overset{\circ}{U}(0)) = 1 \in V(1).$$

Функция шегінің жоғарыдағы анықтамаларында a нүктесінің E жиынының шектік нүктесі болсын дегеннен басқа шарт қойылған жоқ. Енді $\lim_{x\to a} f(x)$ шегінің анықтамасында қосымша $x > a$ немесе $x < a$ шарттарын енгізсек, онда сәйкес оң немесе сол жақты деп аталатын бір жақты шек анықтамаларын енгізуге болады.

Біз $(a, a+\delta)$ және $(a-\delta, a)$ интервалдарын а нүктесінің сәйкес оң және сол жақ ойылған δ маңайы деп атап, сәйкес $\overset{\circ}{U}(a+0)$ және $\overset{\circ}{U}(a-0)$ арқылы белгілейміз.

Сонда $\overset{\circ}{U}_E(a+0) := E \cap \overset{\circ}{U}(a+0)$, $\overset{\circ}{U}_E(a-0) := E \cap \overset{\circ}{U}(a-0)$ жиындарын a нүктесінің E жиындағы ойылған оң жақ, сол жақ маңайы деп атаймыз. Сонымен бірге a нүктесі E жиынының шектік нүктесі болуы қажет, яғни $\overset{\circ}{U}_E(a \pm 0) \neq \varnothing$.

Біржақты шектің анықтамасын былай айтуға болады. Айталық a нүктесі E жиынының бір жақты шектік нүктесі болсын. Онда

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_E(a+0) \quad (f(x) \in V^{\varepsilon}_R(b)),$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_E(a-0) \quad (f(x) \in V^{\varepsilon}_R(b)). \tag{9}$$

Сонымен, оң жақ шек үшін $b = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, ал сол жақ шек үшін $b = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ белгілеулерін қолданады.

1-теорема. $f : E \to \mathrm{R}$ функциясының $E \ni x \to a$ ұмтылғанда $\lim_{x\to a} f(x) = b$

шегі бар сонда және тек сонда, егер $\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\lim_{x \to a-0} f(x)$ оң жақ, сол жақ шектері бар және тең болса.

Қажеттілігі. Егер $\lim_{x \to a} f(x) = b$ шегі бар болса, онда (1) анықтаманы (9) анықтамамен салыстырып, оның $x \to a$ ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының оң жақ та сол жақ та шегі екенін көреміз.

Жеткіліктілігі. Ортақ мәні b болатын бірі біріне тең оң жақ, сол жақ шектері бар болсын. Онда (9) анықтамадан $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{E} (f(x) \in V^{\varepsilon}_{R}(b))$. Ал бұл (7) анықтама бойынша $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ екенін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

1. $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$ шектерінің бар екенін көрсетейік. Мұнда $a=0$ нүктесі $\operatorname{sgn} x$ функциясы анықталған R жиынының оң және сол жақтық шектік нүктесі. Кез-келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon)=1$ болсын. Онда $\overset{0}{U}{}^{\delta}_{R_+}(0+0)$ үшін $\operatorname{sgn} x = 1$ болғандықтан $\forall x \in \overset{0}{U}{}^{\delta}_{R_+}(0+0)$ үшін $f\left(\overset{0}{U}{}^{\delta}_{R_+}(0+0)\right) \subset V^{\varepsilon}_{R}(1)$. Демек, $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$. Дәл осылай екінші шекте дәлелденеді.

Біз 5-мысалда бұл функцияның x нөлге ұмтылғанда шегінің жоқ екенін көрсеткенбіз.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ шегі жоқ. Шынында да, 0 нүктесінің кез-келген $\overset{\circ}{U}(0)$ маңайында $\dfrac{1}{\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n\in N$, түріндегі нүктелер бар және ол нүктелерде функция мәні сәйкес –1 және 1. Бірақ $0<\varepsilon<1$ болса, бұл екі сан да функция шегі деп алған $b\in R$ нүктесінің $V(b)$ маңайында бірге жатпайды. Демек, бірде бір $b\in R$ саны бұл функцияның x нөлге ұмтылғанда шегі бола алмайды.

3. 7-мысалдағыдай

$$E_- = \left\{ x\in R \;\middle|\; x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}-2\pi n},\ n\in N \right\},\quad E_+ = \left\{ x\in R \mid x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n},\ n\in N \right\}$$

жиындары бойынша x нөлге ұмтылғанда $\sin\dfrac{1}{x}$ функциясының шектері бар, яғни

$$\lim_{E_-\ni x\to 0-0} \sin\frac{1}{x} = -1,\qquad \lim_{E_+\ni x\to 0+0} \sin\frac{1}{x} = 1.$$

10. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ функциясы $x\neq 0$ болатын нүктелерде анықталған,

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Егер E жиыны жоғарыдан шектелмесе, онда $+\infty$ нүктесі оның шектік нүктесі

болады деп түсінеміз. Мұны дәлірек былай анықтауға болады. Егер кез-келген $K > 0$ саны үшін $+\,\infty$ нүктесінің маңайы болып табылатын $\left(K,+\infty\right)$ интервалында Е жиынының ең болмағанда бір нүктесі бар болса, яғни $E \cap U^{K}\left(+\infty\right) \equiv E \cap \left(K^{R},+\infty\right) \neq \varnothing$ болса, онда $+\infty$ нүктесі Е жиынының шектік нүктесі деп аталады. Егер $\forall K > 0$ саны үшін $E \cap U_R^K(-\infty) \equiv E \cap (-\infty, -K) \neq \varnothing$ болса, онда $-\infty$ нүктесі E жиынының шектік нүктесі деп аталады. $+\infty$ нүктесі E жиынының шектік нүктесі болған жағдайда x осы $+\infty$ нүктесіне ұмтылғанда $f : E \to R$ функциясының шегі b санына тең деп айтамыз, егер кез-келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $x > K$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $x \in E$ үшін $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын $K > 0$ саны табылса, яғни кванторлар тілінде

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b := \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K > 0 \; \forall x \in E, x > K \; (|f(x) - b| < \varepsilon).$$

Дәл осылай

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b := \forall\varepsilon > 0\,\exists K > 0\,\forall x \in E,\ x < -K\ (|f(x) - b| < \varepsilon),$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b := \forall\varepsilon > 0\,\exists K > 0\,\forall x \in E,\ |x| > K\ (|f(x) - b| < \varepsilon),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty := \forall \mathrm{M} \in \mathrm{R}\,\exists K \in R\,\forall x \in E,\ x > K\ (f(x) < M),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty := \forall \mathrm{M} \in \mathrm{R}\,\exists K \in R\,\forall x \in E,\ x < K\ (M < f(x)),$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty := \forall \mathrm{M} \in \mathrm{R}\,\exists K \in R\,\forall x \in E,\ |x| > K\ (f(x) < M),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty := \forall \mathrm{M} \in \mathrm{R}\,\exists K \in R\,\forall x \in E,\ x < K\ (M < |f(x)|),$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty := \forall \mathrm{M} \in \mathrm{R}\,\exists K \in R\,\forall x \in E,\ |x| > K\ (|f(x)| > M),$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty := \forall K > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in \mathrm{E}\left(0 < |x - a| < \delta\right) \Rightarrow f(x) > K,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty := \forall K > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in \mathrm{E}\left(0 < |x - a| < \delta\right) \Rightarrow f(x) < -K,$$

және т.с.с.

$> \varepsilon$ $f(x'_{n_k}) - f(x'_n \quad) \geq \varepsilon$

теңсіздігінен . Бұл

қайш

ылықманы